

1142

First Year (T.D.C.) Science Examination, 2018

MATHEMATICS

(Calculus)

Paper-II

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 75

PART - A (खण्ड-अ) [Marks : 20

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - B (खण्ड-ब) [Marks : 35

Answer *five* questions (250 words each).

Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - C (खण्ड-स) [Marks : 20

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - A

(खण्ड-अ)

1. Answer the following questions :

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) Find the angle ϕ for the following curve.

निम्न वक्र के लिए कोण ϕ ज्ञात कीजिए।

$$r = ae^{b\theta}$$

(ii) Write the statemet of mean value theorem.

मध्यमान प्रमेय का कथन लिखिये।

(iii) Define asymptote.

अनन्त स्पर्शी को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define cusp.

उभयाग्र को परिभाषित कीजिये।

(v) Define quadrature.

क्षेत्रकलन को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define gamma function.

गामा फलन को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define order of a differential equation.

अवकल समीकरण की कोटि को परिभाषित कीजिए।

(viii) Solve हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$$

(ix) Define singular solution.

विचित्र हल को परिभाषित कीजिए।

(x) Solve हल कीजिए :

$$(y - px)(p - 1) = p$$

PART - B

(खण्ड-ब)

UNIT - I

(इकाई-I)

2. Show that for the following curve, the length of the polar tangent is constant.

सिद्ध कीजिए कि निम्न वक्र के लिए ध्रुवी स्पर्शी अचर है :

$$\theta = \cos^{-1}(r/a) - \left(\frac{1}{r}\right)\sqrt{a^2 - r^2}$$

3. Prove that the number θ which occurs in the Lagrange's

form of remainder $\frac{h^n}{n!} f^n(a + \theta h)$ of the expansion of f in

$[a, a + h]$ tends to $\frac{1}{(n+1)!}$ as $h \rightarrow 0$ provided $f^{(n+1)}(x)$ is

continuous at $x = a$ and $f^{(n+1)}(a) \neq 0$.

सिद्ध कीजिए कि टेलर प्रमेय के द्वारा फलन f को अन्तराल $[a, a + h]$ में

विस्तार करने पर लाग्रान्ज रूप शेषफल $\frac{h^n}{n!} f^n(a + \theta h)$ में प्रयुक्त की θ

सीमा $\frac{1}{(n+1)!}$ को प्रवृत्त होती है जैसे-जैसे $h \rightarrow 0$ जबकि $f^{(n+1)}(x)$,

a पर संतत तथा $f^{(n+1)}(a) \neq 0$.

UNIT - II

(इकाई-II)

4. For the curve $y = ax/(a+x)$ prove that

वक्र $y = ax/(a+x)$ के लिए सिद्ध कीजिए

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{2a}{a}\right)^{2/3}$$

5. Trace the following curve :

निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$y^2(a+x) = x^2(a-x)$$

UNIT - III

(इकाई-III)

6. To prove that :

सिद्ध कीजिए :

$$\sqrt{m} \sqrt{m + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \sqrt{2m} \quad m \in \mathbb{Z}$$

7. Find the perimeter of the loop of the curve :

निम्न वक्र के एक लूप का परिमाण ज्ञात कीजिए :

$$9ay^2 = (x-2a)(x-5a)^2$$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

8. Solve (हल कीजिए) :

$$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

9. Solve (हल कीजिए) :

$$(x^2 - 2xy - y^2) dx - (x + y)^2 dy = 0$$

UNIT - V

(इकाई-V)

10. Solve (हल कीजिए) :

$$p^3 - 4xy p + 8y^2 = 0$$

11. Solve (हल कीजिए) :

$$(D^2 - 4D + 4)y = e^{2x} + \sin 2x$$

PART - C

(खण्ड-स)

12. (a) For the curve $y^2 = c^2 + s^2$ prove that :

वक्र $y^2 = c^2 + s^2$ के लिए सिद्ध कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y^2 - c^2)}}{C}$$

(b) If $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x+\theta h)$ where

$f(x) = x^3 + x$ then find the value of θ .

यदि $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x+\theta h)$ जहाँ

$f(x) = x^3 + x$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

13. Find the equation of the cubic which has the same asymptotes

as the following curve and which touches the axis of y at the

origin and passes through the point $(3, 2)$:

उस त्रिघात की समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी अनन्त स्पर्शियाँ वही हैं जो

निम्न वक्र की हैं और जो y -अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करती हैं तथा

बिन्दु $(3, 2)$ में से होकर जाती हैं :

$$x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$$

14. Show that the area enclosed by the parabolas $y^2 = 4a(x+a)$

and $y^2 = -4a(x-a)$ is $16\frac{a^2}{3}$ sq unit.

सिद्ध कीजिए कि परवल्यों $y^2 = 4a(x+a)$ तथा $y^2 = -4a(x-a)$

के मध्य घिरा हुआ क्षेत्रफल $16\frac{a^2}{3}$ वर्ग इकाई है।

15. (a) Solve (हल कीजिए) :

$$\left\{ y \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \cos y \right\} dx + (x + \log x - x \sin y) dy = 0$$

(b) $ydx - xdy + (1+x^2)dx + x^2 \sin y dy = 0$.

16. Solve (हल कीजिए) :

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y = 10x + \frac{10}{x}$$