

1141

First Year (T.D.C.) Science Examination, 2018

MATHEMATICS

(Algebra)

Paper-I

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 75

PART - A (खण्ड-अ)

[Marks : 20

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - B (खण्ड-ब)

[Marks : 35

Answer *five* questions (250 words each).

Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - C (खण्ड-स)

[Marks : 20

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - A

(खण्ड-अ)

1. (i) Write the condition for the consistency of the system of equation $AX = B$.

समीकरण निकाय $AX = B$ के संगतता होने की शर्त लिखो।

- (ii) What are eigenvalues of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ के अभिलाक्षणिक मूल क्या हैं?

- (iii) Write equation whose roots are two times of the roots of the equation.

उस समीकरण को लिखो जिसके मूल निम्न समीकरण के मूलों के दुगने हों।

$$x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$$

(iv) If α, α, γ are the roots of the cubic equation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0, \text{ then write the value of } \sum \alpha^2 \beta.$$

यदि समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के मूल α, α, γ हैं तो

$\sum \alpha^2 \beta$ का मान लिखो।

(v) Define order of an element of a group.

ग्रुप के अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define permutation group.

क्रमचय समूह को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define a normal subgroup.

विशिष्ट ग्रुप को परिभाषित कीजिए।

(viii) Find the quotient group G/N when

$$G = \langle \{1, -1, i, -i\}, \bullet \rangle \text{ and } N = \langle \{1, -1\}, \bullet \rangle$$

विभाग समूह G/N ज्ञात कीजिए, जबकि $G = \langle \{1, -1, i, -i\}, \bullet \rangle$

तथा $N = \langle \{1, -1\}, \bullet \rangle$

(ix) What do you mean by Kernel of Homomorphism for groups?

ग्रुप के लिये समाकारिता की अष्टि से आप क्या समझते हैं?

(x) Define isomorphism for groups.

ग्रुप के लिये तुल्यकारिता परिभाषित कीजिए।

PART - B

(खण्ड-ब)

UNIT - I

(इकाई-I)

2. Show that a vector α is a linear combination of linearly independent vectors $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ iff $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ are L.D.

दर्शाइये कि एक सदिश α , LI सदिशों $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ का L.C. होगा यदि और केवल यदि $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ L.D. हो।

3. Find eigen values of the following matrix :

निम्न मैट्रिक्स के अभिलाक्षणिक मूलों को ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

UNIT - II

(इकाई-II)

4. Find the condition that the cubic equation

$$x^3 = px^2 + qx - r = 0$$

have its roots in harmonic progression (H.P.).

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिये जिसके लिये घन समीकरण

$x^3 = px^2 + qx - r = 0$ के मूल हरात्मक श्रेणी के मूल हरात्मक श्रेणी (ह. श्रे.) में हो।

5. Solve the following reciprocal equation.

निम्न व्युत्क्रम समीकरण को हल कीजिए।

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$$

UNIT - III

(इकाई-III)

6. Show that the union of two subgroups of a group G is a subgroup iff one is contained in other.

दर्शाइये कि किसी ग्रुप G के दो उपग्रुपों का संघ एक समूह होता है यदि और केवल यदि वे एक दूसरे के अंतर्विष्ट (निहित) हों।

7. If $o(a)$ denotes the order of a in G , then show that

$$o(xax^{-1}) = o(a), \forall x \in G.$$

यदि ग्रुप G के अवयव a की कोटि यदि $o(a)$ से प्रदर्शित हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$o(xax^{-1}) = o(a), \forall x \in G$$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

8. Show that a subgroup N of a group G is a normal subgroup if

$$gNg^{-1} = N, \forall g \in G.$$

सिद्ध कीजिए कि ग्रुप G का उपग्रुप N एक विशिष्ट उपग्रुप होगा यदि और केवल यदि $gNg^{-1} = N, \forall g \in G.$

9. If H and K are two normal subgroups of G then show that

HK is also a normal subgroup of G .

यदि H और K किसी समूह G के दो विशिष्ट उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए

कि HK भी समूह G का एक विशिष्ट उपसमूह है।

UNIT - V

(इकाई-V)

10. Prove that every infinite cyclic group is isomorphic to the additive group of integers.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक असीमित चक्रीय गुप पूर्णाकों के योज्य गुप के तुल्याकारी होता है।

11. Find a regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $G = \{1, -1, i, -i\}$.

गुणन संक्रिया वाले समूह $G = \{1, -1, i, -i\}$ का क्रमचय समूह ज्ञात कीजिए जो कि G के साथ तुल्यकारी हो।

PART - C

(खण्ड-स)

12. State and prove Cayley-Hamilton theorem.

कैली-हैमिल्टन प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

13. Solve the equation by Cardans's method.

निम्न समीकरण को कार्डन विधि से हल कीजिए।

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

14. Show that every infinite cyclic group has two and only two generators.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अपरिमित चक्रीय समूह के दो और केवल दो ही जनक होते हैं।

15. Show that every subgroup of a cyclic group is a cyclic group.

सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय समूह का प्रत्येक समूह चक्रीय समूह होता है।

16. Show that every finite group is isomorphic to some permutation group.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित ग्रुप किसी क्रमचय ग्रुप के तुल्यकारिक होता है।