2141/Sc.

Second Year (T.D.C.) Science Examination, 2018

MATHEMATICS

Paper–I

(Advance Calculus)

Time Allowed : Three Hours
Maximum Marks : 75

PART - A (खण्ड-अ) [Marks : 20

Answer all questions (50 words each).
All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - B (खण्ड-ब) [Marks : 35

Answer *five* questions (250 words each).
Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से **एक-एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए।
प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - C (खण्ड-स) [Marks : 20

Answer any *two* questions (300 words each).
All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - A

(खण्ड-अ)

1. (a) Write all the types of discontinuity for a function f(x).

फलन f(x) के असांतत्य के विभिन्न प्रकार लिखिये।

(b) Define differentiability for a function f(x) at x = a.

फलन f(x) के लिए बिन्दु x = a पर अवकलनीयता की परिभाषा लिखिये।

(c) Using Euler's theorem for $u = \dfrac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$. Prove that

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{20}u \, .$$

फलन $u = \dfrac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$ के लिए आयकर प्रमेय का प्रयोग करते

हुए सिद्ध कीजिए कि $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{20}u$.

(d) Define Envelope for a family of curve.

किसी वक्रकुल के लिए अन्वालोप परिभाषित कीजिए।

(e) Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^3 \int_0^4 \left(x^2 + xy\right) dy\, dx$$

(f) Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{1} \int_{1}^{3} x^3\, dx\, dy\, dz$$

(g) If (यदि) $u = x^2 + y^2, v = xy$, Evaluate (मान ज्ञात कीजिए)

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

(h) If (यदि) $\vec{r} = a\cos t\ i + b\sin t\ j + t\ k$ then (तो) find

(ज्ञात करो) $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

(i) Find (ज्ञात कीजिए) $\int f(t)\, dt$ where (जहाँ)

$$f(t) = \sin t\ i - e^t\ j + t^2 k$$

(j) Write the statement of Gauss-Divergence theorem.

गाँस का अपसरण प्रमेय का कथन लिखिये।

PART - B

(खण्ड-ब)

UNIT - I

(इकाई-I)

2. Prove that if a function f(x) is continuous in [a, b] then it attains its supremum and infimum at least once in [a, b].

   सिद्ध कीजिए कि यदि फलन f(x) अन्तराल [a, b] में संतत है तो वह उस अन्तराल में कम से कम एक बार अपने उच्चक तथा निम्नक को अवश्य ग्रहण करता है।

3. Prove that if f(x) is differentiable on (a, b) and if k is a number between $f'(a)$ and $f'(b)$ then there exists a number $c \in (a,b)$ such that $f'(c) = k$.

   सिद्ध कीजिए कि यदि फलन f(x) अन्तराल (a, b) में अवकलनीय है तथा $f'(a)$ और $f'(b)$ के मध्य कोई संख्या k है तो अन्तराल (a, b) में ऐसा बिन्दु c अवश्य विद्यमान होगा कि $f'(c) = k$.

UNIT - II

(इकाई-II)

4. If (यदि) $u = \sin^{-1}\left(x/y\right) + \tan^{-1}\left(y/x\right)$ then prove that (तो)

सिद्ध कीजिए कि $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

5. Find the maximum values of

उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए :

$$u = \sin x \sin y \sin(x+y)$$

UNIT - III

(इकाई-III)

6. Evaluate (मान ज्ञात कीजिए) $\iiint_V x^2 dx\, dy\, dz$ where V is the region bounded by the planes

(जहाँ क्षेत्र V निम्न तलों से परिबद्ध है)

$$x = 0, y = 0, z = 0 \quad x + y + z = a, a > 0.$$

7. Find the surface of the solid generated by the revolution of the curve $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ about x-axis.

वक्र $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ द्वारा x-अक्ष के परित: परिक्रमण से जनित धनाकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

UNIT - IV

(इकाई-IV)

8. Prove that the vector

सिद्ध कीजिए कि सदिश

$$\vec{f} = (\sin y + z)i + (x\cos y - z)j + (x - y)k$$

is irrotational (अघूर्णीय है).

9. If (यदि) $r = |\vec{r}|$ where (जहाँ) $\vec{r} = xi + yj + zk$ then prove that

(तो सिद्ध कीजिए कि) $\nabla^2 \left(1/r \right) = 0$.

UNIT - V

(इकाई-V)

10. Evaluate (मान ज्ञात कीजिए)

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}, \text{ where (जहाँ) } \vec{F} = (x^2 + y^2)i + xy\, j$$

and C is the curve $y = x^2$ in xy-plane from (0, 0) to (3, 9).

(तथा C समतल xy में बिन्दु (0, 0) से (3, 9) तक वक्र $y = x^2$ है)

11. Evaluate (मान ज्ञात कीजिए) $\int_S \int \vec{F}.\hat{n}\, ds$ where (जहाँ)

$\vec{F} = 4xz\,i - y^2\, j + yzk$ and S is the surface of the cube bounded by the planes (तथा S उस धन का पृष्ठ है जो कि निम्न समतलों से परिबद्ध है)

$$x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$$

PART - C

(खण्ड-स)

12. Show that the following function is continuous but not differentiable at x = 0.

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन x = 0 संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।

$$f(x) = \begin{cases} x.\dfrac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

13. Transfer the following equation in polar-coordinates.

निम्न समीकरण का ध्रुवीय निर्देशांकों में रूपान्तरण कीजिए।

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

14. Evaluate the following integral by changing it into polar coordinates.

निम्न समाकलन को ध्रुवीय निर्देशांकों में परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x\,dx\,dy}{x^2 + y^2}$$

15. Prove (सिद्ध कीजिए) :

$$div\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b}.curl\ \vec{a} - \vec{a}.curl\ \vec{b}$$

16. Verify Stoke's theorem for $\vec{F} = x^2 i + xy\, j$ integrated round the square in the plane z = 0, whose sides are along the lines x = 0, y = 0, x = a, y = a.

फलन $\vec{F} = x^2 i + xy\, j$ के लिए स्टॉक प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जहाँ $\vec{F}$ का समाकलन तल z = 0 में स्थित वर्ग के चारो ओर किया गया है जिसकी भुजाएँ रेखा x = 0, y = 0, x = a, y = a के अनुदिश है।