3142/Sci.

Third Year Science Examination, 2018

MATHEMATICS

Paper–II

(Abstract Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 75

PART - A (खण्ड–अ) [Marks : 20

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - B (खण्ड–ब) [Marks : 35

Answer *five* questions (250 words each).

Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से **एक–एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - C (खण्ड–स) [Marks : 20

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई **दो** प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - A

(खण्ड-अ)

1. (a) Define division ring with an example.

   उदाहरण सहित विभाग वलय को परिभाषित कीजिए।

   (b) Define integral domain and find characteristic of an integral domain $(Q, +, \times)$.

   पूर्णाकीय प्रान्त परिभाषित कीजिये तथा $(Q, +, \times)$ का अभिलक्षण ज्ञात कीजिये।

   (c) Define principal ideal and principal ideal ring with example.

   उदाहरण सहित मुख्य गुणजावली तथा मुख्य गुणजावली वलय परिभाषित कीजिए।

   (d) State fundamental theorem on ring homomorphism.

   वलय समाकारिता पर मूलभूत प्रमेय का कथन लिखिये।

   (e) Define vector space and vector subspace with examples.

   उदाहरण सहित सदिश समष्टि तथा सदिश उपसमष्टि को परिभाषित कीजिये।

(f) Is the vector $\alpha = (0, 4, 20) \in V_3(R)$ as a LC of the following vectors.

क्या $\alpha = (0, 4, 20) \in V_3(R)$ सदिश निम्न सदिशों का LC है?

$\alpha_1 = (2, 1, -1)$ $\alpha_2 = (-1, 0, 3)$, $\alpha_3 = (0, 1, 5)$

(g) Define infinite dimensional vector space with an example.

उदाहरण सहित अपरिमित विमीय सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिये।

(h) Find the co-ordinates of the vector $(4, -3, 2) \in V_3(R)$ relative to its basis $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

$V_3(R)$ के आधार $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ के सापेक्ष सदिश $(4, -3, 2) \in V_3(R)$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिये।

(i) Find Dim Hom $(V_2, V_3) = ?$

Hom (V_2, V_3) की विमा ज्ञात कीजिये।

(j) Find Dim Hom $(V_2, V_3) = ?$

रैखिक रूपान्तरण की कोटि तथा शून्यता ज्ञात कीजिये।

PART - B

(खण्ड-ब)

UNIT - I

(इकाई-I)

2. Prove that every finite integral domain is a field.

सिद्ध कीजिये प्रत्येक पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

3. For any a, b, c $\in$ R show that (R, $\oplus$, $\ominus$) is a field for the operations defined below :

सिद्ध कीजिए कि (R, $\oplus$, $\ominus$) एक क्षेत्र है जहाँ संक्रियाएँ $\oplus$, $\ominus$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

$a \oplus b = a + b - 1$ तथा $a \ominus b = a + b - ab \; \forall \; a, b, c \in R$

Is it an integral domain ?

क्या यह पूर्णांकीय प्रांत है?

UNIT - II

(इकाई-II)

4. Let f be a ring homomorphism from (R, +, $\times$) to (R$'$,$\oplus$, $\ominus$); then prove that the kernel of f i.e., (ker f, +, $\times$) is an ideal of (R, +, $\times$).

माना (R, +, $\times$) से (R$'$,$\oplus$, $\ominus$) में रिंग समाकारिता है तो सिद्ध कीजिए f कि अष्टि (ker f, +, $\times$) रिंग R की गुणजावली होती है।

5. Prove that the ring ($\mathbb{Z}$, +, $\times$) of integers is a principal ideal ring.

पूर्णांकों की रिंग ($\mathbb{Z}$, +, $\times$) एक मुख्य गुणजावली वलय होती है, सिद्ध कीजिए।

UNIT - III

(इकाई-III)

6. If V be the vector space of all functions defined from R to R; then show that f, g, h $\in$ V are LI where

यदि V; R से R में परिभाषित समस्त फलनों की सदिश समष्टि हो तो सिद्ध कीजिये कि f, g, h $\in$ V, LI है, जहाँ :

(i) $f(x) = e^2x, g(x) = x^2\ h(x) = x$

(ii) $f(x) = \sin x\ g(x) = \cos x\ h(x) = x$

7. The union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V(F) is a subspace iff either $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$.

किसी सदिश समष्टि V(F) की दो उप समष्टियों W_1 and W_2 का संघ एक उपसमष्टि होता है यदिदि $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$.

UNIT - IV

(इकाई-IV)

8. If W_1 and W_2 are two subspaces of a finite dimensional vector space V(F) then

यदि W_1 और W_2 एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियाँ हों तो :

$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2)$.

9. Show that the following vectors form a basis for the vector space $V_3(C)$.

सिद्ध कीजिये कि निम्न सदिश, सदिश समष्टि $V_3(C)$ का एक आधार बनाते हैं।

(a) $(1, i, 0)$, $(2i, 1, 1)$, $(0, 1+i, 1-i)$

(b) $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$

UNIT - V

(इकाई-V)

10. Show the following $f : V_2(R) \to V_2(R)$, where $f(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$

is an isomorphism on $V_2(R)$.

सिद्ध कीजिये कि प्रतिचित्रण $f : V_2(R) \to V_2(R)$

जहाँ $f(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$

समष्टि $V_2(R)$ पर एक तुल्याकारिता है।

11. If the matrix of the linear transformation t on $V_2(R)$ relative to the standard basis of $V_2(R)$ relative to the standard basis of $V_2(R)$ is $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, then what is the matrix of t relative to the basis $B_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$?

यदि $V_2(R)$ के मानक आधार के सापेक्ष रैखिक रूपान्तरण t की मैट्रिक्स

$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ हो तो आधार $B_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ के सापेक्ष t की मैट्रिक्स

क्या है?

PART - C

(खण्ड-स)

UNIT - I

(इकाई-I)

12. Prove that the set of matrices of the form $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & \bar{a} \end{bmatrix}$, a, b∈c is skew field for matrix addition and multiplication. Is it a field? Is it an integral domain.

सिद्ध कीजिये कि $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & \bar{a} \end{bmatrix}$, a, b∈c रूप के सभी मैट्रिसेज का समुच्चय मैट्रिक्स योग एवं गुणन के लिये एक विभाजन रिंग है। क्या यह एक फील्ड है? क्या यह एक पूर्णांकीय प्रांत है?

UNIT - II

(इकाई-II)

13. A commutative ring with zero divisors can be embedded into a field. Define field of quotients.

किसी शून्य के भाजकों से रहित क्रमविनिमेय वलय का एक फील्ड में अन्तर्स्थापन किया जा सकता है। विभाग क्षेत्र परिभाषित कीजिये।

UNIT - III

(इकाई–III)

14. Examine which of the following sets of vectors $\alpha = (a_1, a_2, ...a_n)$ in R^n are subspaces of R^n ? $(n \geq 3)$

(a) $\forall\, \alpha, a_1 \geq 0$

(b) $\forall\, \alpha, a_1 + 3a_2 = a_3$

(c) $\forall\, \alpha, a_2 = a_1^2$

(d) $\forall\, \alpha, a_1 a_2 = 0$

UNIT - IV

(इकाई–IV)

15. State and prove existence theorem and extension theorem.

अस्तित्व प्रमे तथा विस्तार प्रमेय को सिद्ध कीजिये।

UNIT - V

(इकाई–V)

16. Let V and V′ be finite dimensional vector spaces over the same field F, then

$$\dim \text{Hom}(V, V') = \dim V \times \dim V'$$

माना एक फील्ड F पर V तथा V′ परिमित विमीय सदिश समष्टियाँ हों, तो:

$$\dim \text{Hom}(V, V') = \dim V \times \dim V'$$