

3141/Sc.

III Year (T.D.C.) Science Examination, 2018

MATHEMATICS

Paper-I

(Real Analysis)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 75

PART - A (खण्ड-अ) [Marks : 20

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - B (खण्ड-ब) [Marks : 35

Answer *five* questions (250 words each).

Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - C (खण्ड-स) [Marks : 20

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - A

(खण्ड-अ)

UNIT - I

(इकाई-I)

1. (i) Define isolated point.
वियुक्त बिन्दु को परिभाषित कीजिये।

(ii) State Heine Borel theorem.
हेने बोरेल प्रमेय का कथन लिखिये।

UNIT - II

(इकाई-II)

(iii) Discuss the convergence of the geometric series.
गुणोत्तर श्रेणी के अभिसरण की विवेचना कीजिए।

(iv) Write the statement of D'Alembert's ratio' test.
द लेम्बर का अनुपात परीक्षण का कथन लिखिये।

UNIT - III

(इकाई-III)

(v) State the Darboux theorem.
डारबू प्रमेय का कथन लिखिये।

(vi) Write down the necessary and sufficient condition for R-integrability.
रीमान समाकलनीयता के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध लिखिये।

UNIT - IV

(इकाई-IV)

(vii) Find the Fourier coefficient a_0 in the Fourier series expansion of the function :

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

निम्न फलन के लिये फुरिये श्रेणी में फुरिये गुणांक a_0 का मान ज्ञात कीजिये।

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & ; \quad -\pi < x < 0 \\ x & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

(viii) Find the Fourier coefficient a_0 in the Fourier series expansion of the function $f(x) = x \sin x; -\pi < x < \pi$.

निम्न फलन के लिये फुरिये श्रेणी में फुरिये गुणांक a_0 का मान ज्ञात कीजिए। $f(x) = x \sin x; -\pi < x < \pi$

UNIT - V

(इकाई-V)

(ix) Test the convergence or divergence of the integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

निम्न समाकल के अभिसरण अथवा अपसरण के परीक्षण करिए।

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

(x) Test the convergence or divergence of the integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

निम्न समाकल के अभिसरण अथवा अपसरण के परीक्षण करिए।

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

PART - B

(खण्ड-ब)

UNIT - I

(इकाई-I)

2. Find the g.l.b. and l.u.b. of the set $S = \{x \in Z : x^2 \leq 25\}$.

समुच्चय $S = \{x \in Z : x^2 \leq 25\}$ का उच्चक एवं निम्नक ज्ञात कीजिए।

3. Prove that no open interval (a, b) is compact.

सिद्ध कीजिए कि कोई विवृत अंतराल संहत नहीं है।

UNIT - II

(इकाई-II)

4. Prove that the sequence $\left\{ \left(\frac{3n}{(n!)^3} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}$ is convergent.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\{ \left(\frac{3n}{(n!)^3} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}$ अभिसारी है।

5. Test the following series for convergence where the general

terms are given as $U_n = \frac{\sqrt{n+1}-1}{(n+2)^3-1}$.

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए, जिसका व्यापक पद है।

$$U_n = \frac{\sqrt{n+1}-1}{(n+2)^3-1}$$

UNIT - III

(इकाई-III)

6. If $f(x) = x \in [0,1]$, Then show that f is R-integrable on $[0, 1]$

$$\text{and } \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

यदि फलन $f(x) = x \in [0,1]$, तब सिद्ध कीजिए कि f अंतराल $[0, 1]$

पर R-समाकलनीय है तथा $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

7. Let f is a function defined on the interval $[0, 1]$ such that

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \text{ if } x \text{ is rational} \\ 1 & ; \text{ if } x \text{ is irrational} \end{cases} \cdot \text{ The show that } f \text{ is not R-}$$

integrable on $[0, 1]$.

यदि फलन f अंतराल $[0, 1]$ पर निम्न प्रकार से परिभाषित है। $f(x) = 0$ यदि x परिमेय हो एवं $f(x) = 1$ यदि x अपरिमेय हो। तब सिद्ध कीजिए कि f अंतराल $[0, 1]$ पर R-समाकलनीय है।

UNIT - IV

(इकाई-IV)

8. Obtain the cosine series of $\sin x$ in the interval $0 < x < \pi$.

$\sin x$ की $0 < x < \pi$ अंतराल में कोज्या श्रेणी प्राप्त कीजिए।

9. Obtain the Fourier series for the function

$$f(x) = x^2; -\pi < x < \pi.$$

फलन $f(x) = x^2; -\pi < x < \pi$ के लिये फुरिये श्रेणी ज्ञात कीजिये।

UNIT - V

(इकाई-V)

10. Test the convergence of $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण करिए। $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

11. Test the convergence of $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$.

निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण करिए।

PART - C

(खण्ड-स)

UNIT - I

(इकाई-I)

12. (a) State and prove Bolzano-Weierstress Theorem.

बालजनो विस्त्रास प्रमेय का कथन लिखें एवं सिद्ध कीजिए।

(b) Prove that the set of rational numbers Q is an archimedean ordered field.

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय अर्किमेदीय क्रमित क्षेत्र है।

UNIT - II

(इकाई-II)

13. (a) Prove that the sequence $X_n = \frac{2n-7}{3n+2}; \forall n \in \mathbb{N}$ is monotonically increasing, bounded and convergent.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $X_n = \frac{2n-7}{3n+2}; \forall n \in \mathbb{N}$ एकदिष्ट वर्धमान,

परिबद्ध एवं अभिसारी है।

- (b) If $x > 0$, then test the convergence of the following series

$$x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \frac{15}{17}x^4 + \dots + \frac{n^2-1}{n^2+1}x^n + \dots$$

यदि $x > 0$ हो तो निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए।

$$x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \frac{15}{17}x^4 + \dots + \frac{n^2-1}{n^2+1}x^n + \dots$$

UNIT - III

(इकाई-III)

14. (a) Find the upper and lower Riemann integral for the function defined in $[0, 1]$ such that :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & ; \text{ if } x \text{ is rational number} \\ 1-x & ; \text{ if } x \text{ is irrational number} \end{cases}$$

and show that $f(x)$ is not R-intgrable in $[0, 1]$.

अंतराल $[0, 1]$ में परिभाषित निम्न फलन के ऊपरी एवं निम्न रीमान-समाकल ज्ञात कीजिए और यह प्रदर्शित कीजिए कि $f(x)$ अंतराल $[0, 1]$ पर R-समाकलनीय नहीं है। $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ यदि x परिमेय हो एवं $f(x) = 1-x$ यदि x अपरिमेय हो।

- (b) Every monotonic function f is R-integrable.
प्रत्येक एकदिष्ट फलन R-समाकलनीय होता है।

UNIT - IV

(इकाई-IV)

15. (a) Examine for term by term integration the series $\sum x^{n-1}(1-2x^n)$ in the interval $[0, 1]$.

श्रेणी $\sum x^{n-1}(1-2x^n)$ का अंतराल $[0, 1]$ में पदशः समाकलन के लिए परीक्षण कीजिए।

- (b) Obtain the fourier series for the function $f(x) = x; -\pi < x < \pi$.

फलन $f(x) = x; -\pi < x < \pi$ के लिये फुरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए।

UNIT - V

(इकाई-V)

16. (a) Test the convergence of the following integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण करिए। $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

- (b) Prove that the set Q of rational numbers is countable.
सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q गणनीय होता है।